

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (ΤΟΜΟΣ Α)

1) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi} - \frac{1}{\chi} \right)$$

2) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu(\alpha\chi)}{e^x - \sigma\upsilon\nu\chi} = 3$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 - 6\chi + 2$, στο διάστημα $[-1, 7]$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\xi \in (-1, 7)$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος.

4) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3 - 9\chi^2 + 24\chi - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

5) α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f : [2, e] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \ln x$. Να δείξετε ότι:

$$2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$$

6) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, με $f(1) = 1$ και $f(3) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.

7) α) Να εξηγήσετε τη γεωμετρική σημασία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

β) Αν για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $x \in [0, 1]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, να βρείτε τα $\xi \in (0, 1)$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ.

8) α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\chi^3 + 6\chi + 5 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο \mathbb{R} .

9) Αν για την συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, να δείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta$ τότε

$$(\beta - \alpha) \ln(e\alpha) < \ln\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right) < (\beta - \alpha) \ln(e\beta)$$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$, $x \in [-3, 3]$. Να βρείτε:

α) τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f

β) το σύνολο τιμών της f .

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $\alpha \leq \beta$ να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta \leq \ln\left(\frac{e^\alpha + 1}{e^\beta + 1}\right)$.

12) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(4\alpha - 3)x^2 + 1$ να στρέφει τα κοίλα πάνω σε όλο το πεδίο ορισμού της. (μ:2,5)

13) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $\psi = \ln(x - 2)$

β) $\psi = \frac{x^3}{x^2 + 5}$

14) Έστω οι συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

15) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης, να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$\beta) f(x) = (x+2)e^x$$

$$\gamma) f(x) = \ln(2x-1)$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

16) Να αποδείξετε ότι $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1,1)$.

17) Να βρείτε τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x - 2\operatorname{arctan} x$$

$$\beta) f(x) = \operatorname{arcsin}(x^2)$$

18) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 4x^3 - 3\alpha x^2 + 12x + 2$. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + (x-1)^4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο $x_0 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^x + (x-1)^4 + 3x - 2 \geq 0$.

20) Δίνεται η καμπύλη $\psi = e^{-x}$ και σημείο P πάνω σε αυτή με τετμημένη a , όπου $a > 0$. Έστω A η προβολή του P πάνω στον άξονα OX και B η προβολή του σημείου P πάνω στον άξονα OY. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου OAPB γίνεται ακρότατο και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

21) Γεωργός θέλει να κατασκευάσει ντεπόζιτο νερού χωρητικότητας $10m^3$, που να έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτού στο πάνω μέρος και του οποίου η βάση να είναι τετράγωνο πλευράς X μέτρων. Αν το κόστος κατασκευής είναι για τη βάση 5 ευρώ το τετραγωνικό μέτρο, ενώ για τα πλάγια τοιχώματα 2 ευρώ το τετραγωνικό μέτρο να:

α) δείξετε ότι το κόστος κατασκευής ψ είναι $\psi = 5x^2 + \frac{80}{x}$

β) να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει το ντεπόζιτο, ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο.

22) Η μεγάλη βάση ενός ισοσκελούς τραπέζιου έχει $(2x+2)$ μέτρα, ενώ κάθε μια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του έχει μήκος 2 μέτρα. Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τραπέζιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.