<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ</u>

<u>ΚΥΚΛΟΣ:</u>

(1) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που περνά από τα σημεία Α(5, 3) Β(3, -1) και το κέντρο του είναι σημείο του άξονα $y'Oy$.

Απ: $x^2+y^2-6y-16=0$

(2) Κύκλος περνά από τα σημεία (3,1) και (-1,3) και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=3x-2$. Να βρείτε την εξίσωση του.

Απ: $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

(3) Δίνεται η εξίσωση $(c): x^2+y^2-6\lambda x-4=0$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ.

(β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (c) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(4) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου:
$x^2+y^2-8x+2y-8=0$ στα σημεία τομής του με τον άξονα $y'y$.

(5) Φέρουμε τις εφαπτομένες *ΟΑ, ΟΒ* από το σημείο $O(0,0)$ προς τον κύκλο $(x-2)^2+(y-4)^2=4$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

(6) Δίνεται κύκλος: $x^2+y^2-2x-4=0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που είναι παράλληλες με την ευθεία: $4x-2y+1=0$.

(7) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2+y^2-2x+4y=0$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x-2y+9=0$. **Απ:** $y=-2x\pm 5$

(8) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ(-3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία: $4x-3y+5=0$.

(9) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο Α(4, 2) και εφάπτεται της ευθείας $y=x$ στο σημείο Β(1,1).

(10) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία y = x και εφάπτεται στους δύο άξονες.

(11) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α(3 , 2), Β(4 , 1) και εφάπτεται του άξονα $x'x$.

(12) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (3,3) και εφάπτεται στους δύο άξονες.

(13) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $x+2y=0$, $x+2y-10=0$ και περνά από το σημείο Α(1,2).

(14) Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι $x-4=0$, $3x-4y+36=0$ και $4x+3y+23=0$. Να βρείτε την εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

(15) Το Ρ(5, -2) είναι το μέσο της χορδής ΑΒ του κύκλου:
$x^2+y^2-6x-2y-15=0$.
(α) να βρείτε το μήκος της χορδής ΑΒ.
(β) να δείξετε ότι η εξίσωση της είναι η $2x-3y=16$.

(16) Για ποιες τιμές του α η ευθεία (ε): $(2a+1)x-(a-1)y+3=0$

(α) περνά από το κέντρο Κ του κύκλου $x^2+y^2-x+y=11$.

(β) ορίζει χορδή μήκους $\sqrt{2}$ στον κύκλο $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

(17) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το σημείο (3, -2) να είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου: $x^2+y^2+\frac{\lambda}{2}x+4y+\lambda+7=0$. ***(απ.*** $\lambda>-{}^{24}\!/_{5}$***)***

(18) Να ορίσετε την τιμή του κ ώστε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος από το σημείο (5, 4) προς τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2+2\kappa y=0$ να ισούται με 1. (**απ:** $\kappa=-5$)

(19) Δίνονται οι κύκλοι: $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ και $x^2+y^2+2x-4y+4=0$.
(α) να βρείτε την θέση τους.
(β) να βρείτε την εξίσωση του ριζικού τους άξονα.

(20) Δίνεται κύκλος $x^2+y^2-4x-5=0$ και το σημείο Κ(5,4). Να γράψετε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στον πρώτο κύκλο και έχει κέντρο το Κ.

(21) Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(x-\alpha)^2+y^2=R^2$ και το σημείο του $T\left(a+R\sigma\upsilon\nu\vartheta,\ R\eta\mu\vartheta\right)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Τ τέμνει τον άξονα των χ στο Α και τον άξονα των y στο Β.
(α) να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Τ είναι:

$$x\sigma\upsilon\nu\vartheta+y\eta\mu\vartheta=\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta+R$$

(β) να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΑΒ είναι: $y^2\left(2x-a\right)^2=R^2\left(x^2+y^2\right)$

(*Παγκύπριες 2008)*

(22) Δίνονται οι κύκλοι (Κ): $x^2+y^2=4$ και (Λ): $x^2+y^2-8x-4y+12=0$. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων $Σ(x,y)$ του επιπέδου, των οποίων η δύναμη τους ως προς τον κύκλο (Λ) είναι διπλάσια από την δύναμη τους ως προς τον κύκλο (Κ). ***(Παγκύπριες 2010)***

ΠΑΡΑΒΟΛΗ:

1) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $ε_1$ και $ε_2$ της παραβολής $y^2 = 4x$ στα σημεία της Α(1, 2) και Β(1, -2) είναι κάθετες μεταξύ τους και τέμνονται στο Σ(-1, 0).

2) Να βρείτε την γωνία των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 4x$ που περνούν από το σημείο Σ(-1, 0) ή οποιοδήποτε άλλο σημείο της διευθετούσας.

3) Οι εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 4x$ που φέρονται από τυχαίο σημείο της διευθετούσας της είναι κάθετες μεταξύ τους.

4) (α) Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ στο σημείο της Α(1, 2) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής, να δείξετε ότι $ΑΓΕ = 90^o$.
(β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο την ΑΕ εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

5) Θεωρούμε την παραβολή $y^2 = 4αx$. Σε τυχαίο σημείο της φέρουμε την εφαπτομένη (ε) και από την εστία την κάθετη στην (ε). Να δείξετε ότι οι δύο ευθείες συναντώνται σε σημείο που ανήκει στον άξονα $y'y$.

6) Θεωρούμε την παραβολή $x^2 = 5y$. Να βρείτε μια ευθεία που διέρχεται από την εστία της παραβολής και ορίζει χορδή μήκους 10.
(απ. $y = x + \frac{5}{4}$, $y = -x + \frac{5}{4}$)

7) Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του κύκλου και της παραβολής και να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

8) Από το σημείο Μ(-9, 6) της διευθετούσας της παραβολής $y^2 = 36x$ φέρνουμε τις εφαπτομένες της. Δείξετε ότι είναι κάθετες.

9) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής:
(α) $y^2 = 9x$ στο σημείο της Α(1, -3).
(β) $y^2 = 4x$ που είναι παράλληλη με την $y = x - 3$
(γ) $y^2 = 16x$ που περνά από το σημείο Α(-3,4).

10) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής $y^2 = 6x$, από την οποία (εφαπτομένη) η κορυφή O απέχει $\sqrt{3}$ μονάδες.

ΕΛΛΕΙΨΗ:

1) Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές της, την εκκεντρότητα και τις διευθετούσες των ελλείψεων:

(α) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ **(β)** $25x^2 + 9y^2 = 225$ **(γ)** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

2) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1$ και $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. Να αποδείξετε γενικά ότι οι ελλείψεις των μορφών $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2 + \mu^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \mu^2} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες να μ είναι φυσικός αριθμός.

3) Να βρείτε τις εξισώσεις των ελλείψεων στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $2\gamma = 6$ και $\varepsilon = \frac{3}{5}$ $(\alpha > \beta)$ (β) $\alpha = 2\beta$ και $E(2, 0)$

(γ) τα σημεία $A(1, 1)$ και $B = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

(δ) $E_1(0, -5)$, $E_2(0, 5)$ και $BB' = 26$

4) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{1}{4}$ και εστίες $E_1\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ και $E_2\left(\sqrt{2}, 0\right)$

5) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $(\alpha > \beta)$ όταν οι εστίες της βλέπουν τις κορυφές B', B υπό ορθή γωνία.

6) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης αν γνωρίζετε ότι υπάρχει σημείο της M, ώστε το τρίγωνο EME′ να είναι ισόπλευρο. (E, E′ εστίες της έλλειψης)

7) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB της έλλειψης $3x^2 + 4y^2 = 28$ που έχει ως μέσο το σημείο M(1, 1). <u>Απάντηση:</u> $3x + 2y = 5$

8) Θεωρούμε τις ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=\alpha+\beta$ με α > β . Να δείξετε ότι έχουν τις ίδιες εστίες και ότι οι εκκεντρότητες τους ε_1 και ε_2 αντίστοιχα συνδέονται με την σχέση: $\varepsilon_1=\varepsilon_2\cdot\sqrt{2-\varepsilon_2^2}$

9) Μεταβλητή ευθεία διέρχεται από την εστία Ε' έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α > β και τέμνει την έλλειψη στα Α , Β . Αν Ε η άλλη εστία, να αποδείξετε ότι η περίμετρος L του τριγώνου ΑΕΒ παραμένει σταθερή.

10) Κύκλος με κέντρο (0,0) και ακτίνα β, περνά από τις εστίες της έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

με α > β. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

11) Να βρείτε την μορφή της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τις εστίες και τα άκρα του μικρού άξονα της έλλειψης: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

13) Τα σημεία E_1, E_2 είναι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και το Ρ είναι σημείο της έτσι ώστε $\frac{(PE_1)}{(PE_2)}=\frac{2}{1}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου PE_1E_2.

(Απ. Ε=2)

14) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ και $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ τέμνονται σε τέσσερα σημεία, τα οποία είναι κορυφές τετραγώνου. Να βρείτε το εμβαδόν του.

15) Έστω Μ(ασυνθ , βημθ) τυχαίο σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να δείξετε ότι: (ΜΕ).(ΜΕ′) + (ΜΟ)^2 = α^2 + β^2

16) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Να βρείτε την εξίσωση στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της που σχηματίζουν με τον άξονα $x'Ox$ γωνία 135°.